

**Programm ZBALKEN für Windows.** Stand 5.6.2006. Prof. Dr.-Ing. Frank Rieg, Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD, Fakultät für Angewandte Naturwissenschaften, Universität Bayreuth.

[www.uni-bayreuth.de/departments/konstruktionslehre](http://www.uni-bayreuth.de/departments/konstruktionslehre) und [www.cad.uni-bayreuth.de](http://www.cad.uni-bayreuth.de)

Dies ist ein kleines, schnelles Hilfsprogramm für die Vorlesungen und Übungen sowie die Hanser-Bücher *Decker* und *Taschenbuch der Maschinenelemente*. (Das Programm fußt auf einem TI59-Programm von 1980, das von Prof. Dr.-Ing. Otto Ewald und Dipl.-Ing. F.Merlino entworfen wurde).

Legen Sie mit ZBALKEN keine sicherheitskritischen Bauteile aus und arbeiten Sie nicht damit, wenn Sie nicht in der Elastostatik versiert sind!

Das Programm nutzt das *Reduktions- bzw. Übertragungsverfahren* für ebene Balken. Die Balken können beliebig statisch überbestimmt gelagert sein, federnde Lager und Gerbergelenke haben. Für einfache Standard-Biegefälle, statisch bestimmt gelagert, empfehlen wir das TI-89 Hilfsprogramm **XBIEGE**, für komplizierte räumliche Fachwerke und (große) Kontinuumsstrukturen das OpenSource FEA-Programm **Z88**<sup>®</sup> unseres Lehrstuhls ([www.z88.de](http://www.z88.de)).

Linkes Trägerende:	Taste F1	Typ des linken Trägerendes
Träger-Abschnitte, ggf. Streckenlasten:	Taste F3	Länge, EI, bei Streckenlasten ggf. q und $q_s (=q')$
Wellen-Abschnitte, ggf. Streckenlasten:	Taste F5	Länge, E, d, bei Streckenlasten ggf. q und $q_s (=q')$
Einzellasten:	Taste F4	Lastart (Kräfte, Momente, $\Delta\psi$ , $\Delta w$ ), Last
Zwischenb.: Lager, Gelenke:	Taste F6	gelenkiges Auflager oder Gelenk
Zwischenb.: elastisches Lager:	Taste F2	Federsteifigkeit c
Rechtes Trägerende:	Taste F6	Typ des rechten Trägerendes, ggf. M und Q
Berechnen:	Taste F7	für den 2. Durchlauf

**Vorgehen: Immer zwei Durchläufe ausführen.** Im ersten Durchlauf linkes Trägerende, alle Abschnitte, Einzellasten, Zwischenbedingungen und rechtes Trägerende eingeben. Zweiter Durchlauf: Wieder mit linkem Trägerende beginnen, wieder nacheinander alles des ersten Durchlaufs eingeben, aber nun auf Wunsch auch jeweils berechnen. Die Abschnitte können nun kürzer sein, wenn Zwischenwerte berechnet werden sollen.

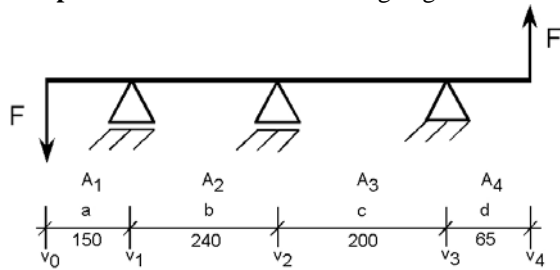
Zur Orientierung werden die gerade getätigten Eingaben des ersten Durchlaufs mit gelbem Hintergrund im Ausgabefenster, die Eingaben des zweiten Durchlaufs mit orangem Hintergrund im Ausgabefenster gezeigt (wobei als Warnsignal, dass nun der 2. Durchlauf beginnt, bereits die Eingabe des rechten Trägerendes orange bestätigt wird).

Wenn ein dann ein anderer Träger berechnet werden soll: Das Programm verlassen und neu starten, damit alle Variablen wieder intern auf Null gesetzt werden.

	Vorzeichen
Absenkung $w$	$+w$ 
Näheungs- winkel $\psi$	$+\psi$ 
Biegemoment $M$	
Querkraft $Q$	

linkes Trägerende F1				
elastisches Auflager F2				
Trägerabs. F3				beliebiger linearer Verl. $q, q_s = \frac{\Delta q}{l}$
Wellenabs. F5				
Einzellasten F, M, $\Delta\psi$ , $\Delta w$ F4				
Zwischenbed. Lager, Gelenke F6				
rechtes Trägerende F6				

**Beispiel 1:** Statisch überbestimmt gelagerte Welle.  $d_1$  bis  $d_4 = 80$  mm,  $F = 33218$  N,  $E = 210000$  N/mm<sup>2</sup>



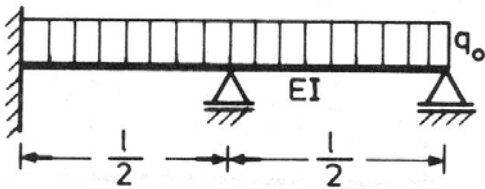
### 1. Durchlauf: Dateneingabe

1)	linkes Trägerende:	F1	<i>freies Ende</i>
2)	Einzellast:	F4	$Q = -33218$
3)	Wellenabschnitt:	F5	$l=150$ , $E=210000$ , $d=80$ , Streckenlast <i>nein</i>
4)	Zwischenbed. Lager:	F6	<i>Zwischenbedingung, gelenkiges Lager</i>
5)	Wellenabschnitt:	F5	$l=240$ , $E=210000$ , $d=80$ , Streckenlast <i>nein</i>
6)	Zwischenbed. Lager:	F6	<i>Zwischenbedingung, gelenkiges Lager</i>
7)	Wellenabschnitt:	F5	$l=200$ , $E=210000$ , $d=80$ , Streckenlast <i>nein</i>
8)	Zwischenbed. Lager:	F6	<i>Zwischenbedingung, gelenkiges Lager</i>
9)	Wellenabschnitt:	F5	$l=65$ , $E=210000$ , $d=80$ , Streckenlast <i>nein</i>
10)	rechtes Trägerende:	F6	<i>rechtes Trägerende, freies Ende, <math>M=0</math>, <math>Q=33218</math></i>

### 2. Durchlauf: Dateneingabe + Berechnung

11)	linkes Trägerende:	F1	1 E 2 E ( <i>freies Ende</i> )
12)	Einzellast:	F4	4 E ( $Q$ ) -33218 E
13)	Berechne:	F7	$w = -0.21778$ , $\psi = 0.001747$ , $M = 0$ , $Q = 33218$
14)	Wellenabschnitt:	F5	<i>nun einmal die halbe Länge für Zwischenwerte eingeben:</i> $l=75$ , $E=210000$ , $d=80$ , Streckenlast <i>nein</i>
15)	Berechne:	F7	$w = -0.092295$ , $\psi = 0.001526$ , $M = 2.49135e+006$ , $Q = 33218$
16)	Wellenabschnitt:	F5	<i>nun 75 weiter: <math>l=75</math>, <math>E=210000</math>, <math>d=80</math>, Streckenlast <i>nein</i></i>
17)	Berechne:	F7	$w = 0$ , $\psi = 0.000862$ , $M = 4.9827e+006$ , $Q = 33218$ <i>Q stimmt, denn das Lager ist noch nicht eingegeben!</i>
18)	Zwischenbed. Lager:	F6	<i>Zwischenbedingung, gelenkiges Lager</i>
19)	Berechne:	F7	$w = 0$ , $\psi = 0.000862$ , $M = 4.9827e+006$ , $Q = -24378.7$ <i>Damit wird die Lagerkraft am 1. Lager (=Sprung in der Q-Linie!): <math>Q_{17} + Q_{19} = 33218 + 24379 = 57597</math></i>
20)	Wellenabschnitt:	F5	$l=240$ , $E=210000$ , $d=80$ , Streckenlast <i>nein</i>
21)	Berechne:	F7	$w = 0$ , $\psi = -0.000308$ , $M = -868198$ , $Q = -24378.7$
22)	Zwischenbed. Lager:	F6	<i>Zwischenbedingung, gelenkiges Lager</i>
23)	Berechne:	F7	$w = 0$ , $\psi = -0.000308$ , $M = -868198$ , $Q = -6454.86$ <i>Damit wird die Lagerkraft am 2. Lager (=Sprung in der Q-Linie!): <math>Q_{21} + Q_{23} = 24379 - 6455 = 17924</math></i>
24)	Wellenabschnitt:	F5	$l=200$ , $E=210000$ , $d=80$ , Streckenlast <i>nein</i>
25)	Berechne:	F7	$w = 0$ , $\psi = 0.000409$ , $M = -2.15917e+006$ , $Q = -6454.86$ <i>Oh, wir wollten aber nicht so weit, sondern auf halber Länge zwischen 2. und 3. Lager rechnen. Daher:</i>
26)	Wellenabschnitt:	F5	$l=100$ , $E=210000$ , $d=80$ , Streckenlast <i>nein</i>
27)	Berechne:	F7	$w = -0.017925$ , $\psi = -2.54792e-005$ , $M = -1.51368e+006$ , $Q = -6454.86$ <i>und wieder nach rechts rücken:</i>
28)	Wellenabschnitt:	F5	$l=100$ , $E=210000$ , $d=80$ , Streckenlast <i>nein</i> . <i>Da müssen die gleichen Werte wie bei 25) herauskommen...</i>
29)	Berechne:	F7	$w = 0$ , $\psi = 0.000409$ , $M = -2.15917e+006$ , $Q = -6454.86$
30)	Zwischenbed. Lager:	F6	1 E 0 E ( <i>gel. Lager</i> ) 0 E ( <i>nein</i> )
31)	Berechne:	F7	$w = 0$ , $\psi = 0.000409$ , $M = -2.15917e+006$ , $Q = 33218$ <i>Damit wird die Lagerkraft am 2. Lager (=Sprung in der Q-Linie!): <math>Q_{29} + Q_{31} = 6455 + 33218 = 39673</math></i>
32)	Wellenabschnitt:	F5	$l=65$ , $E=210000$ , $d=80$ , Streckenlast <i>nein</i>
33)	rechtes Trägerende:	F6	<i>rechtes Trägerende, freies Ende, <math>M=0</math>, <math>Q=33218</math></i> <i>Achtung: Die Einzellast darf nicht getrennt über F4 eingegeben werden! Daher hier F eingeben. Ähnlich würde ein Moment von z.B. 30000 am rechten Trägerende eingegeben werden: rechtes Trägerende, freies Ende, <math>M=30000</math>, <math>Q=0</math>.</i>
34)	Berechne:	F7	$w = 0.033816$ , $\psi = 0.000576$ , $M = 0$ , $Q = 33218$ .

**Beispiel 2:** Durchlaufträger, 2fach statisch überbestimmt.  $q_0 = 10 \text{ N/mm}$ ,  $EI = 2.1 \times 10^{13} \text{ Nmm}^2$ ,  $l = 6000 \text{ mm}$



Gross/Schnell: Formel- und Aufgabensammlung zur Technischen Mechanik II (S.97)

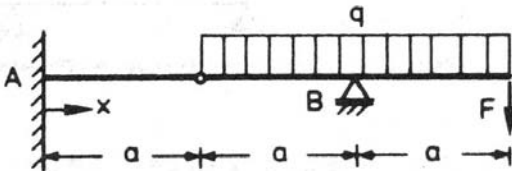
1.Durchlauf:

- |    |                     |    |  |
|----|---------------------|----|--|
| 1) | linkes Trägerende:  | F1 | Einspannung  |
| 2) | Trägerabschnitt:    | F3 | $l=3000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast ja, $q=10$ , $q_s=0$ |
| 3) | Zwischenbed. Lager: | F6 | Zwischenbedingung, gelenkiges Lager                        |
| 4) | Trägerabschnitt:    | F3 | $l=3000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast ja, $q=10$ , $q_s=0$ |
| 5) | rechtes Trägerende: | F6 | rechtes Trägerende, gelenkiges Lager, $M=0$                |

2.Durchlauf:

- |     |                     |    |  |
|-----|---------------------|----|--|
| 6)  | linkes Trägerende:  | F1 | Einspannung  |
| 7)  | Berechne:           | F7 | $w=0.$ , $\psi=0.$ , $M=-6.42857e+006$ , $Q=13928,6$   |
| 8)  | Trägerabschnitt:    | F3 | $l=3000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast ja, $q=10$ , $q_s=0$   |
| 9)  | Berechne:           | F7 | $w=0.$ , $\psi=7.65306e-005$ , $M=-9.64286e+006$ , $Q=-16071,4$  |
| 10) | Zwischenbed. Lager: | F6 | Zwischenbedingung, gelenkiges Lager  |
| 11) | Berechne:           | F7 | $w=0.$ , $\psi=7.65306e-005$ , $M=-9.64286e+006$ , $Q=18214,3$<br>Damit wird die Lagerkraft am 2.Lager (=Sprung in der Q-Linie!): $Q_9 + Q_{11}$<br>$=16071+18214=34285$ |
| 12) | Trägerabschnitt:    | F3 | $l=3000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast ja, $q=10$ , $q_s=0$   |
| 13) | Berechne:           | F7 | $w=0$ , $\psi=-0.000306$ , $M=0.$ , $Q=-11785.7$   |
| 14) | rechtes Trägerende: | F6 | rechtes Trägerende, gelenkiges Lager, $M=0$  |
| 15) | Berechne:           | F7 | $w=0.$ , $\psi=-0.000306$ , $M=0.$ , $Q=-11785.71$   |

**Beispiel 3:** Gerberträger.  $q_0 = 10 \text{ N/mm}$ ,  $EI = 2.1 \times 10^{13} \text{ Nmm}^2$ ,  $a = 3000 \text{ mm}$



Gross/Schnell: Formel- und Aufgabensammlung zur Technischen Mechanik I (S.117)

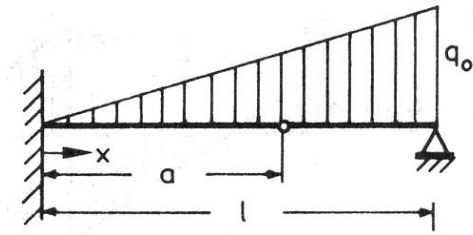
1.Durchlauf:

- |    |                      |    |  |
|----|----------------------|----|--|
| 1) | linkes Trägerende:   | F1 | Einspannung  |
| 2) | Trägerabschnitt:     | F3 | $l=3000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast nein                 |
| 3) | Zwischenbed. Gelenk: | F6 | Zwischenbedingung, Gelenk                                  |
| 4) | Trägerabschnitt:     | F3 | $l=3000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast ja, $q=10$ , $q_s=0$ |
| 5) | Zwischenbed. Lager:  | F6 | Zwischenbedingung, gelenkiges Lager                        |
| 6) | Trägerabschnitt:     | F3 | $l=3000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast ja, $q=10$ , $q_s=0$ |
| 7) | rechtes Trägerende:  | F6 | rechtes Trägerende, freies Ende, $Q=5000$                  |

2.Durchlauf:

- |     |                      |    |  |
|-----|----------------------|----|--|
| 8)  | linkes Trägerende:   | F1 | Einspannung  |
| 9)  | Berechne:            | F7 | $w=0.$ , $\psi=0.$ , $M=1.5e+007$ , $Q=-5000$  |
| 10) | Trägerabschnitt:     | F3 | $l=3000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast nein   |
| 11) | Berechne:            | F7 | $w=-2.14286$ , $\psi=-0.001071$ , $M=0.$ , $Q=-5000.$  |
| 12) | Zwischenbed. Gelenk: | F6 | Zwischenbedingung, Gelenk  |
| 13) | Berechne:            | F7 | $w=-2.14286$ , $\psi=-0.000179$ , $M=0.$ , $Q=-5000$   |
| 14) | Trägerabschnitt:     | F3 | $l=3000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast ja, $q=10$ , $q_s=0$   |
| 15) | Berechne:            | F7 | $w=0$ , $\psi=0.003036$ , $M=-6e+007$ , $Q=-35000$   |
| 16) | Zwischenbed. Lager:  | F6 | Zwischenbedingung, gelenkiges Lager  |
| 17) | Berechne:            | F7 | $w=0.$ , $\psi=0.003036$ , $M=-6e+007$ , $Q=35000$<br>Lagerkraft am 2.Lager: $Q_{15} + Q_{17} = 35000+35000=70000$ |
| 18) | Trägerabschnitt:     | F3 | $l=3000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast ja, $q=10$ , $q_s=0$   |
| 19) | rechtes Trägerende:  | F6 | rechtes Trägerende, freies Ende, $Q=5000$  |
| 20) | Berechne:            | F7 | $w=16.0714$ , $\psi=0.00625$ , $M=0$ , $Q=5000.$   |

**Beispiel 4:** Gerberträger, E Enter-Taste.  $q_0 = 50 \text{ N/mm}$ ,  $EI = 2.1 \times 10^{13} \text{ Nmm}^2$ ,  $a = 6000 \text{ mm}$ ,  $l = 10000 \text{ mm}$



Gross/Schnell: Formel- und Aufgabensammlung zur Technischen Mechanik I (S.116)

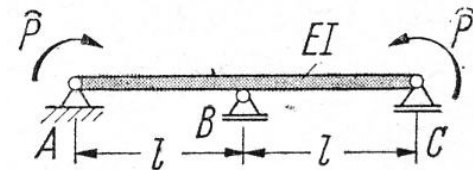
1.Durchlauf:

- |    |                      |    |  |
|----|----------------------|----|--|
| 1) | linkes Trägerende:   | F1 | <i>feste Einspannung</i>   |
| 2) | Trägerabschnitt:     | F3 | $l=6000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast $ja$ , $q=0$ , $qs=0.005$  |
| 3) | Zwischenbed. Gelenk: | F6 | <i>Zwischenbedingung, Gelenk</i>                                 |
| 4) | Trägerabschnitt:     | F3 | $l=4000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast $ja$ , $q=30$ , $qs=0.005$ |
| 5) | rechtes Trägerende:  | F6 | rechtes Trägerende, <i>gelenkiges Lager</i> , $M=0$              |

2.Durchlauf:

- |     |                      |    |  |
|-----|----------------------|----|--|
| 6)  | linkes Trägerende:   | F1 | <i>feste Einspannung</i>   |
| 7)  | Berechne:            | F7 | $w=0.$ , $\psi=0.$ , $M=-8e+008$ , $Q=163333$                    |
| 8)  | Trägerabschnitt:     | F3 | $l=6000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast $ja$ , $q=0$ , $qs=0.005$  |
| 9)  | Zwischenbed. Gelenk: | F6 | <i>Zwischenbedingung, Gelenk</i>                                 |
| 10) | Trägerabschnitt:     | F3 | $l=4000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast $ja$ , $q=30$ , $qs=0.005$ |
| 11) | rechtes Trägerende:  | F6 | rechtes Trägerende, <i>gelenkiges Lager</i> , $M=0$              |
| 12) | Berechne:            | F7 | $w=0.$ , $\psi=-0.11045.$ , $M=0.$ , $Q=-86666.7$                |

**Beispiel 5:** Träger, E Enter-Taste. Moment  $\hat{P} = 100000 \text{ Nmm}$ ,  $E = 206000 \text{ N/mm}^2$ ,  $l = 500 \text{ mm}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$



Marguerre: Technische Mechanik Zweiter Teil (S.77)

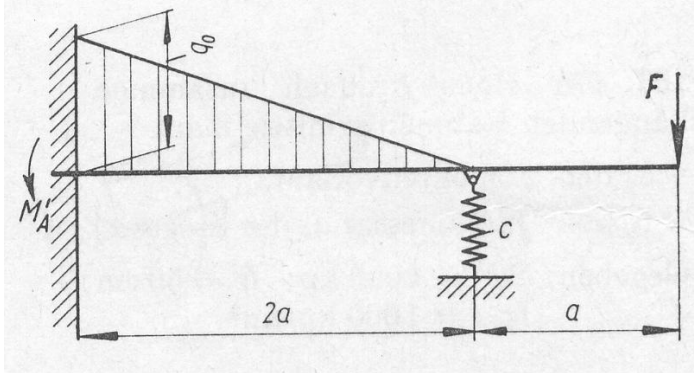
1.Durchlauf:

- |    |                     |    |  |
|----|---------------------|----|--|
| 1) | linkes Trägerende:  | F1 | <i>gelenkiges Lager</i>                                  |
| 2) | Einzellast:         | F4 | <i>Moment= -100000</i>                                   |
| 3) | Wellenabschnitt:    | F5 | $l=500$ , $E=206000$ , $d=20$ , Streckenlast <i>nein</i> |
| 4) | Zwischenbed. Lager: | F6 | <i>Zwischenbedingung, gelenkiges Lager</i>               |
| 5) | Wellenabschnitt:    | F5 | $l=500$ , $E=206000$ , $d=20$ , Streckenlast <i>nein</i> |
| 6) | rechtes Trägerende: | F6 | rechtes Trägerende, <i>gelenkiges Lager</i> , $M=100000$ |

2.Durchlauf:

- |     |                     |    |  |
|-----|---------------------|----|--|
| 7)  | linkes Trägerende:  | F1 | <i>gelenkiges Lager</i>  |
| 8)  | Einzelmoment:       | F4 | <i>Moment= -100000</i>   |
| 9)  | Berechne:           | F7 | $w=0.$ , $\psi=0.007726$ , $M=100000$ , $Q=-300$   |
| 10) | Wellenabschnitt:    | F5 | $l=500$ , $E=206000$ , $d=20$ , Streckenlast <i>nein</i>   |
| 11) | Berechne:           | F7 | $w=0.$ , $\psi=0$ , $M=-50000$ , $Q=-300$  |
| 12) | Zwischenbed. Lager: | F6 | <i>Zwischenbedingung, gelenkiges Lager</i>   |
| 13) | Berechne:           | F7 | $w=0.$ , $\psi=0.$ , $M=-50000$ , $Q=300$<br><i>Damit wir die Lagerkraft bei B: <math>300+300=600</math></i> |
| 14) | Wellenabschnitt:    | F5 | $l=500$ , $E=206000$ , $d=20$ , Streckenlast <i>nein</i>   |
| 15) | rechtes Trägerende: | F6 | rechtes Trägerende, <i>gelenkiges Lager</i> , $M=100000$   |
| 16) | Berechne:           | F7 | $w=0.$ , $\psi=-0.007726$ , $M=100000$ , $Q=300$   |

**Beispiel 6:** Träger,  $F = 16667 \text{ N}$ ,  $EI = 2.1 \times 10^{13} \text{ Nmm}^2$ ,  $a = 500 \text{ mm}$ ,  $q_0 = 50 \text{ Nmm}$ ,  $c = 171818 \text{ N/mm}$



Göldner: Übungsaufgaben aus der Technischen Mechanik (S.52)

1. Durchlauf:

- |    |                          |    |  |
|----|--------------------------|----|--|
| 1) | linkes Trägerende:       | F1 | <i>Einspannung</i>   |
| 2) | Trägerabschnitt:         | F3 | $l=1000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast <i>ja</i> , $q=50$ , $q_s=-0.05 \text{ E}$ |
| 3) | Zwischenbed. ela. Lager: | F2 | $c=171818$   |
| 4) | Trägerabschnitt:         | F3 | $l=500$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast <i>nein</i>                                 |
| 5) | rechtes Trägerende:      | F6 | <i>rechtes Trägerende, freies Ende, <math>M=0</math>, <math>Q=16667</math></i>   |

2. Durchlauf:

- |     |                          |    |   |
|-----|--------------------------|----|---|
| 6)  | linkes Trägerende:       | F1 | <i>Einspannung</i>  |
| 7)  | Berechne:                | F7 | $w= 0.$ , $\psi= 0.$ , $M= -8333413.6$ , $Q= 16666.58$  |
| 8)  | Trägerabschnitt:         | F3 | $l=1000$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast <i>ja</i> , $q=50$ , $q_s=-0.05 \text{ E}$  |
| 9)  | Berechne:                | F7 | $w= 0.145505$ , $\psi= 0.000298$ , $M= -8333500.$ , $Q= -8333.42$   |
| 10) | Zwischenbed. ela. Lager: | F2 | $c=171818$  |
| 11) | Berechne:                | F7 | $w= 0.145505$ , $\psi= 0.000298$ , $M= -8333500.$ , $Q= 16667$<br><i>Damit wird die Federkraft: <math>Q_9 + Q_{11}</math> <math>8333+16667=25000</math></i> |
| 12) | Trägerabschnitt:         | F3 | $l=500$ , $EI=2.1E13$ , Streckenlast <i>nein</i>  |
| 13) | rechtes Trägerende:      | F6 | <i>rechtes Trägerende, freies Ende, <math>M=0</math>, <math>Q=16667</math></i>  |
| 14) | Berechne:                | F7 | $w= 0.327387$ , $\psi= 0.000397$ , $M= 0.$ , $Q= 16667$   |